

УДК 621.921

**М. С. САЗОНОВА**, канд. физ.-мат. наук,  
**Е. Е. ЗАПОРОЖЧЕНКО**, канд. физ.-мат наук, Днепропетровск, Украина,  
**С. Н. ЛАВРИНЕНКО**, канд. техн. наук, Харьков, Украина,  
**А. Г. МАМАЛИС**, д-р техн. наук, Афины, Греция

## **ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ МИКРОПРОФИЛЯ ОБРАБОТАННЫХ УЛЬТРАПРЕЦИЗИОННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

У теперішній час підвищується рівень вимог до метрології параметрів шорсткості, методів контролю, обробки й візуалізації отриманих результатів. Метою даної статті є підвищення точності визначення періодичних складових мікропрофілю оброблених ультрапрецизійних поверхонь за рахунок аналітичного моделювання й одержання розрахункових формул для визначення необхідного числа вимірів основних параметрів шорсткості.

В настоящее повышается уровень требований к метрологии параметров шероховатости, методам контроля, обработки и визуализации полученных результатов. Целью данной статьи является повышение точности определения периодических составляющих микропрофиля обработанных ультрапрецизионных поверхностей за счет аналитического моделирования и получения расчетных формул для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

At the present time the level of requirements to metrology of parameters of a roughness, a quality monitoring, processings and visualisation of the received results is raising. The purpose of given article is increase of accuracy of definition of periodic components of a microprofile of the processed ultraprecision surfaces at the expense of analytical modelling and reception of settlement formulas for definition of necessary number of measurements of key parameters of a roughness.

В настоящее время возникает все больше предпосылок для глубоко изучения корреляционных связей между параметрами шероховатости поверхности, сформированной в процессе ультрапрецизионной лезвийной обработки и функционально-эксплуатационными свойствами готового изделия. При этом повышается уровень требований к метрологии параметров шероховатости, методам контроля, обработки и визуализации полученных результатов. Целью данной статьи является повышение точности определения периодических составляющих микропрофиля обработанных ультрапрецизионных поверхностей за счет аналитического

моделирования и получения расчетных формул для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

Важными параметрами шероховатости поверхности являются средний шаг неровностей  $S_m$  и средний шаг неровностей по вершинам  $S$  микрогеометрического профиля обработанной поверхности.

Известно, что параметры шероховатости, в том числе и шаговые параметры  $S_m$  и  $S$ , определяются на так называемой базовой длине  $L$ , которая зависит от величины микронеровностей. Поскольку параметры  $S_m$  и  $S$  носят статистический характер, ограниченность трассы измерения приводит к значительному разбросу их значений. В связи с этим задача определения режимов измерений, обеспечивающих получение результата с заданной точностью, является весьма важной.

Для изучения погрешности определения шаговых параметров необходимо располагать следующими статистическими характеристиками этих параметров: математическим ожиданием и дисперсией. Считаем, что шероховатость профиля описывается нормальным стационарным случайным процессом  $h(x)$ , имеющим математическое ожидание  $E[h(x)] = 0$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma$ . Кроме того, принимаем, что данный случайный процесс имеет непрерывную корреляционную функцию и ее производные. Это обеспечивает непрерывность рассматриваемого случайного процесса и его производных.

Данная модель шероховатости пригодна для описания нерегулярной шероховатости, свойственной большинству финишных операций [1-3].

Для исследования статистических характеристик шаговых параметров воспользуемся особыми точками профиля шероховатости. Согласно [4,9], математическое ожидание особых точек  $n$ -го порядка на единицу длины трассы (в которых  $n$ -я производная процесса равна нулю, а  $(n+1)$ -я отлична от нуля) определяется следующим образом:

$$E\{N_{\text{особ}}\} = \frac{1}{\pi} \sqrt{-\frac{\rho^{(2n+2)}(0)}{\rho^{2n}(0)}}, \quad (1)$$

где:  $\rho^{(2n+2)}(0)$  и  $\rho^{2n}(0)$  - соответственно  $(2n + 2)$ -я и  $(2n)$ -я производные корреляционной функции  $\rho(\tau)$  при  $\tau=0$ .

В наших исследованиях ограничимся особыми точками 1-го и 2-го порядка, которыми являются, соответственно, число нулей и число максимумов случайного процесса.

Шаговые параметры  $S_m$  и  $S$  связаны с числом нулей и максимумов следующими зависимостями:

$$Sm = \frac{1}{n^+(0)} \text{ и } S = \frac{1}{m}, \quad (2)$$

где:  $n^+(0)$  – число положительных нулей на единицу длины;  $m$  – число максимумов на единицу длины.

Математическое ожидание числа положительных нулей вытекает как частный случай формулы (1):

$$E\{n^+(0)\} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\rho''(0)}. \quad (3)$$

Проведенные исследования корреляционных функций нерегулярной шероховатости показывают, что для аппроксимации этих функций могут быть применены следующие выражения [5]:

$$\begin{aligned} \rho_1(\tau) &= e^{-\alpha\tau^2} \\ \rho_2(\tau) &= (1 + \gamma\tau^2) \end{aligned} \quad (4)$$

где:  $\tau$  – расстояние между сечениями профиля;  $\alpha, \gamma$  – коэффициенты аппроксимаций.

Для этих аппроксимаций выражения математического ожидания будут, соответственно, следующими:

$$E_1\{n^+(0)\} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\alpha}, \quad E_2\{n^+(0)\} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\gamma}. \quad (5)$$

Поскольку коэффициенты корреляционных функций (4)  $\alpha, \gamma$  определяются одинаковыми выражениями, то в дальнейшем будем пользоваться одной формулой.

Для определения математического ожидания параметра  $S_m$  используем выражение, дающее математическое ожидание функции  $y = x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , согласно которому [6]:

$$E[S_m] = \frac{1}{E[n^+(0)]}. \quad (6)$$

Тогда:

$$E[S_m] = \frac{2\pi}{\sqrt{2\alpha}}. \quad (7)$$

При вычислении математического ожидания шага по вершинам  $S$  вместо  $h(x)$  в качестве исходного процесса рассмотрим производную его

$h'(x)=g(x)$ . Известно, что реализация имеет максимумы, если выполняются следующие условия:

$$h'(x) = g(x) = 0 \text{ и } h''(x) = g'(x) < 0, \quad (8)$$

т. е. максимумы будем рассматривать как нули процесса  $g(x)$  с отрицательной производной.

Тогда из общего выражения (1) получаем, что:

$$E\{n^+(0)\} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\rho_g''(0)}, \quad (9)$$

где:  $\rho_g''(0)$  - вторая производная нормированной корреляционной функции процесса  $g(x)$  при  $\tau=0$ .

Корреляционная функция производной  $K_g(\tau)$  определяется следующим образом [7]:

$$K_g(\tau) = \frac{\delta^2 K_h(\tau)}{\delta \tau^2}, \quad (10)$$

где:  $(\tau)$  - корреляционная функция исходного процесса  $h(x)$ .

Согласно (10), нормированная корреляционная функция производной  $\rho_g(\tau)$  при  $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$  будет:

$$\rho_g(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} - 2\alpha\tau e^{-\alpha\tau^2}. \quad (11)$$

Дважды продифференцировав выражение (11) и используя выражения (9) и (6), получаем формулу для математического ожидания шага по вершинам:

$$E[S] = \frac{2\pi}{\sqrt{6\alpha}}. \quad (12)$$

Как видно из (7) и (12), с увеличением скорости убывания корреляционной функции математическое ожидание шаговых параметров возрастает.

Для определения дисперсии шаговых параметров воспользуемся формулой, выражающей дисперсию случайной величины через ее второй начальный момент [7]:

$$D\{x\} = \alpha_2(x) - E^2\{x\}, \quad (13)$$

где:  $\alpha_2(x)$  - второй начальный момент случайной величины.

Второй начальный момент числа положительных пересечений на единицу длины согласно [4, 8,10] выражается:

$$E\{[n^+(0)]\} = \frac{1}{4L^2} [E\{n_L(0)\} + 2 \int_0^L (L-\tau) F(\tau) d\tau] , \quad (14)$$

где:  $E\{n_L(0)\}$  — среднее число нулей реализации на интервале  $L$ ;

$$F(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{h}(x_1) \dot{h}(x_2) f_4(0, \dot{h}(x_1), 0, \dot{h}(x_2)) d\dot{h}(x_1) d\dot{h}(x_2) . \quad (15)$$

Подставив (14) в формулу (13), получаем формулу для дисперсии числа положительных нулей реализации  $h(x)$  на единицу длины в следующем виде:

$$D\{n^+(0)\} = \frac{1}{4L^2} \left[ E\{n_L(0)\} - E^2\{n_L(0)\} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^L (L-\tau) \frac{1+H(\tau)\operatorname{arctg}H(\tau)}{1-\rho^2(\tau)} \sqrt{G(\tau)} d\tau \right] . \quad (16)$$

Конкретизируем выражение функции  $F(\tau)$  для нормального стационарного процесса. Согласно [4,10], функция  $F(\tau)$  равняется:

$$F(\tau) = \frac{1+H(\tau)\operatorname{arctg}H(\tau)}{\pi^2(1-\rho^2(\tau))} G^{-1/2}(\tau) \quad (17)$$

где:  $G(\tau) = [1-\rho^2(\tau)] [\rho''^2(0) - \rho''^2(\tau)] + 2[\rho''(0) - \rho(\tau)\rho''(\tau)]\rho'^2(\tau) + \rho'^4(\tau)$ ;

$$H(\tau) = \frac{[1-\rho^2(\tau)]\rho''(\tau) + \rho(\tau)\rho'^2(\tau)}{\sqrt{1-\rho^2(\tau)}\sqrt{G(\tau)}} . \quad (18)$$

Используя выражение (17), получаем окончательную формулу для дисперсии числа нулей на единицу длины нормального стационарного процесса:

$$D\{n^+(0)\} = \frac{1}{4L^2} \left[ E\{n_L(0)\} - E^2\{n_L(0)\} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^L (L-\tau) \frac{1+H(\tau)\operatorname{arctg}H(\tau)}{1-\rho^2(\tau)} \sqrt{G(\tau)} d\tau \right] . \quad (19)$$

Даже для простейших дифференцируемых корреляционных функций количественные результаты относительно дисперсии числа нулей не удается получить аналитически, а приходится применять численное интегрирование или приближенные методы расчета.

Пусть корреляционная функция профиля

$$\rho(\tau)=e^{-\alpha\tau^2}$$

Тогда математическое ожидание числа нулей на длине  $L$

$$E\{n_L(0)\}=\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L$$

Введем также обозначение  $x=\tau\sqrt{\alpha}$ . Тогда, выполнив все вычисления, предписываемые формулой (19), получим:

$$D\{n^+(0)\}=\frac{1}{4L^2}\left[\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L-\frac{2\alpha}{\pi^2}L^2+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{\alpha}L}\frac{\sqrt{\alpha}L-x}{1-e^{-2x^2}}\left\{\sqrt{G(x)}+\frac{[2x^2-(1-e^{-2x^2})]e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}\arctg H(x)\right\}dx\right], \quad (20)$$

где:  $G(x)=(1-e^{-2x^2})^2-4x^4e^{-2x^2}$ ,

$$H(x)=\frac{[2x^2-(1-e^{-2x^2})]e^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}G^{-1/2}. \quad (21)$$

Для реальных трасс измерения шероховатости можно принимать, что  $x=\tau\sqrt{\alpha}\geq 10$ . Исходя из этого, можно убедиться, что для таких значений  $x$  величины  $G(x)$  и  $H(x)$  принимают приближенно следующие значения:

$$G(x)=1 \text{ и } H(x)=0. \quad (22)$$

Учитывая (22), выражение дисперсии числа нулей можно написать:

$$D\{n^+(0)\}\cong\frac{1}{4L^2}\left[\frac{\sqrt{2\alpha}}{\pi}L-\frac{2\alpha}{\pi^2}L^2+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{\alpha}L}(\sqrt{\alpha}L-x)dx\right]=\frac{\sqrt{2\alpha}}{4\pi}\cdot\frac{1}{L}. \quad (23)$$

Из формулы (23) видно, что дисперсия числа нулей для измерения изменяется по линейному закону. Такой же вывод получен в работах [4, 12, 13].

В работе [4] указывается, что дисперсия числа нулей изменяется приближенно при помощи следующей зависимости:

$$D\{n^+(0)\}\cong 0,114\sqrt{\frac{2\alpha}{4\pi}}\cdot\frac{1}{L}. \quad (24)$$

Из формулы (23) получаем следующую зависимость для дисперсии:

$$D\{n^+(0)\}\cong 0,119\sqrt{\frac{2\alpha}{4\pi}}\cdot\frac{1}{L}. \quad (25)$$

Сравнивая выражения (24) и (25), видно, что приближенная формула (23) дает несколько завышенное значение дисперсии числа нулей.

Для определения дисперсии шага  $S_m$  используем зависимость, (позволяющую определять дисперсию случайной величины  $y$ , которая является функцией других случайных величин  $x_1, x_2, \dots$ , у которых дисперсия известна [6]:

$$D\{y\} \cong \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 D_i + 2 \sum_{i=j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j), \quad (26)$$

где:  $\text{cov}(x_i, x_j)$  - корреляционный момент случайных величин  $x_i, x_j$ .

В нашем случае, используя (26), получаем:

$$D\{S_m\} = \frac{D\{n^+(0)\}}{E^4\{n^+(0)\}}$$

и, следовательно:

$$D\{S_m\} = 0,456 \frac{1}{L} \chi \frac{\pi^3 \sqrt{\pi}}{\alpha \sqrt{\alpha}}. \quad (27)$$

Дисперсия шага  $S_m$  уменьшается с увеличением трассы измерения.

Для определения дисперсии среднего шага по максимумам  $S_{\max}$  рассмотрим производную  $h'(x)=g(x)$ , пересечения которой с нулевым уровнем соответствуют максимумам исходного процесса. В таком случае дисперсия числа максимумов может быть определена по формуле (19). Величины  $G(\tau)$  и  $H(\tau)$  при корреляционной функции (11) приближенно равняются:

$$G(\tau) \cong 36\alpha^2 \quad \text{и} \quad H(\tau) \cong 0. \quad (28)$$

Таким образом, получаем следующее выражение для дисперсии, максимумов на единицу длины:

$$D\{m\} = \frac{1}{4L^2} \left[ E\{m_L\} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^L (L-\tau) \sqrt{36\alpha^2} d\tau \right] = \frac{\sqrt{6}\alpha}{4\pi} \chi \frac{1}{L}. \quad (29)$$

Учитывая зависимость (26), получаем, что дисперсия шагового параметра определяется по зависимости:

$$D\{S\} = \frac{\sqrt{6}\pi^2}{9\alpha L \sqrt{\alpha}}. \quad (30)$$

При определении необходимого числа измерений шаговых параметров  $S_m$  и  $S$  условимся, что выборочное среднее значение параметров, полученное при экспериментальном определении, асимптотически будет иметь нормальное распределение.

При таких условиях найдем такую величину  $\Delta$ , для которой:

$$P(|\bar{Z} - E\{Z\}| \leq \Delta) = \beta, \quad (31)$$

где:  $\bar{Z}$  - выборочное среднее значение исследуемого параметра;  $\beta$  - доверительная вероятность;  $\Delta$  - абсолютная погрешность.

Преобразуя выражение (31), согласно [7] получаем необходимое число измерений параметра  $\bar{Z}$  при заданной погрешности:

$$n = \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2} \frac{D\{Z\}}{E\{Z\}}, \quad (32)$$

где:  $t_\beta$  - табулированная величина, зависящая от  $\beta$  [9]:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{E\{Z\}}$$

Подставив в выражение (32) дисперсию и математическое ожидание, получим необходимое число измерений шаговых параметров:

$$n_{S_m} \cong \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2} \frac{\pi}{\sqrt{2\alpha L}} \quad (33)$$

$$n_S \cong \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2} \frac{\pi}{\sqrt{6\alpha L}}. \quad (34)$$

Сравнивая формулы (33) и (34), делаем вывод, что параметр  $S_m$  требует большего числа измерений, чем  $S$  при одной и той же точности, т.к.

$$\frac{n_{S_m}}{n_S} \cong 1,7$$

Сравним необходимое число измерений для параметров  $R_a$  и  $S_m$  при одной и той же погрешности. Для этого используем интервал корреляции, поскольку установлено, что число измерений для параметра  $R_a$  пропорционально интервалу корреляции. То есть при корреляционной функции  $\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$  интервал корреляции равняется:



$$\tau_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (35)$$

Используя (35), можно записать формулы необходимого числа измерений параметров  $R_a$  и  $S_m$  следующим образом:

$$n_{S_m} \cong 0,456 \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2} \chi \frac{\pi}{L} \chi \tau_k \quad (36)$$

$$n_{R_a} \cong 0,5 \frac{t_\beta^2}{\varepsilon^2} \chi \frac{1}{L} \chi \tau_k \quad (37)$$

Сравнивая выражение (36), получаем, что  $n_{S_m} \approx 3n_{R_a}$ , то есть для определения параметра  $S_m$  необходимо измерений в 3 раза больше.

С целью проверки результатов аналитических исследований проведено экспериментальное изучение параметров нерегулярной шероховатости. Для сравнения относительной погрешности параметров  $R_a$ ,  $S_m$  и  $S$  при одном и том же количестве базовых длин  $L$  была использована методика определения доверительного интервала при помощи закона распределения Стьюдента.

По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. В результате аналитического моделирования получены формулы для определения необходимого числа измерений основных параметров шероховатости.

2. Сравнение полученных формул показывает, что наибольшее число измерений требует параметр  $S_m$ .

**Список литературы:** 1. *Миура Тейдзи*. Статистический анализ профилограмм ультра-прецизионных поверхностей. Сеймицу Кикай, J, Soc. Precis. Mech., Japan, 2007, 33, No. 12. 2. *M. Pesante*. Determination of Surface Roughness Typology by Means of Amplitude Density Curves. CIRP Annals, Vol. XII, 2. 3. *Williamson I.B.* The Shape of Solid Surfaces. Surface Mechanics. Proceedings of the ASME Annal Winter Meeting, Los Angeles, Nov.1969. 4. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. М.: «Наука», 1970. 5. *Левин А.И., Немировский А.С.* Установление интервалов независимости между значениями отдельных функционалов.// «Измерительная техника», 1970, № 3. 6. *Смирнов Н.В., Дунин–Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Физматгиз, 1965. 7. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: «Наука», 1969. 8. *Бендат Дж.* Основы теории случайных шумов и ее применение. М.: «Наука», 1965. 9. *Геранин В. А.* Дисперсия числа выбросов отрезка стационарного гауссовского шума.// «Радиотехника и электроника», 1967, т. 12, вып. 5. 10. *Суворов Б. М.* Дисперсия числа выбросов нормального шума. // «Радиотехника и электроника», 1971, т. 16, вып. 1.